Om potensen af primtalsdivisorer i midterbinomialkoefficienten

Sebastian T. Holdum, Frederik R. Klausen, Peter M. R. Rasmussen

7. april 2014

Introduktion

Potensen af primdivisorer i midterbinomialkoefficienten er et emne der har været studeret igennem de sidste 50 år. Med udgangspunkt i følgende åbne problem fra den kanoniske bog *Concrete Mathematics*

Formodning 1. *4 eller 9 deler midterbinomialkoefficienten* $\binom{2n}{n}$ *for* $n > 4$ *og* n *forskellig fra 64 og 256.*

diskuterer vi midterbinomialkoefficienter, særlig dem på formen $\binom{2^{k+1}}{2^k}$, da 4 deler $\binom{2n}{n}$, hvis n ikke er en potens af 2.

Indledende resultater

Vi starter med at vise, at nogle simple kendte resultater omkring binomialkoefficienter på formen formen $\binom{2^{k+1}}{2^k}$ i elementær talteori. Desuden viser vi et nyt resultat om, at hvis 9 ikke deler $\binom{2^{k+1}}{2^k}$, så deler 9 $\binom{2^{k+2}}{2^{k+1}}$

Densitetsestimater

Vi går herefter over til at lave densitetsestimater, hvor hoveddelen af vores arbejde ligger. Densitetsestimaterne beskæftiger sig med følgende funktion:

$$\mathcal{T}_p^n(a) = \#\left\{0 \leq k < a \mid p^n \nmid \binom{2^{k+1}}{2^k}\right\}$$

Denne funktion beskriver altså, hvor mange tal mindre end a der kan være, hvor p^n ikke går op i $\binom{2^{k+1}}{2^k}$.

Ved hjælp af periodebetragtninger omkring de sidste cifre af 2^k i primtalsbaser kan vi udlede et nyt interessant resultat, som vi kan benytte til at få følgende estimat:

$$\mathcal{T}_3^2(a) \leq a^{\frac{\log(2)}{\log(3)}}(0.3\log(a) + 2.06),$$

Vi har altså, at densiteten af modeksempler til formodningen går mod 0.

Endvidere undersøger vi mere generelle tilfælde, hvor vi først opnår

$$\mathcal{T}_p^1(a) \leq 8a^{\frac{\log\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\log(p)}}.$$

Dette resultat er meget sammenligneligt med litteraturen og det forbedrer delvist et resultat af Kennedy og Cooper, og i et specialtilfælde et af Narkiewicz.

Endelig opnås det mest generelle resultat:

$$\mathcal{T}_p^n(a) = O\left(\log(a)^{n-1} \cdot a^{\frac{\log(\frac{p+1}{2})}{\log(p)}}\right).$$

som er helt nyt og vi viser at for ulige $m \in \mathbb{N}$ vil densiteten af tal k så $m \nmid \binom{2^{k+1}}{2^k}$ gå mod 0.

Computereksperimenter

Endelig forbedrer vi de hidtidige computerberegninger på området dramatisk, idet vi bekræfter formodning 1 for $n < 2^{10^{13}}$, mens det tidligere resultat var for $n < 2^{4.2 \cdot 10^6}$ af Goethegluck.

Algoritmen vi benytter er også mere sofistikeret, end den tidligere brugte, som var ganske naiv.

Heuristik

Vi har også undersøgt formodningen heuristisk og ved at gøre antagelser om tilfældigheden af fordelingen af cifre i potenser af 2 skrevet i base 3, har vi opstillet nogle formodninger, som dataindsamling har bekræftet. På baggrund af dette har vi opstillet sandsynlighedsvurderinger af formodningens sandhed.

Under denne antagelse svarer sandsynligheden for et modeksempel på formodning til, at man vandt onsdagslotto hver uge i omkring tre milliarder år.

Konklusion

Vi har altså fundet en række resultater, som ikke er set før i litteraturen. Samlet set bekræfter resultaterne det intuitive billede af, at vilkårligt høje primtalspotenser deler midterbinomialkoefficienterne vilkårligt ofte. Heuristiske analyser og numerik i relation hertil understreger dette yderligere. Imidlertid har vi endnu ikke fået udtømt alle vores idéer, og det er muligt. at vores indsigter kan benyttes til andre relaterede problemer.